

**-EXERCICE 30.11-**

 • **ENONCE :**

« Pouvoir de résolution d'un réseau »

- On considère un réseau de  $n=1100$  traits/mm, délimité par une monture de 35 mm sur 35 mm.
- Il est éclairé par un faisceau lumineux **parallèle**, sous un angle d'incidence noté  $i$  (compté à partir de la normale au plan du réseau) ; l'observation se fait à l'**infini**, selon une direction variable notée  $\theta$ .
- On a donc  $i$  et  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .
- On prendra pour limites du spectre visible les longueurs d'onde  $\lambda_V = 0,400\mu m$  et  $\lambda_R = 0,750\mu m$

1) Quel est l'ordre maximal  $p_{\max}$  observable pour chacune des radiations extrêmes du spectre visible ?

2) On s'intéresse, pour un angle  $i$  donné, à la « **dispersion angulaire** »  $\frac{d\theta}{d\lambda}$  du réseau ; calculer cette grandeur dans le **second** ordre et au **minimum** de déviation, pour  $\lambda = 0,5890\mu m$ .

3) Par ailleurs, on rappelle que le « **pouvoir de résolution** » du réseau, au sens de Rayleigh, est donné par :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = pN$$

où  $\delta\lambda_{\min}$  est le plus petit écart de longueur d'onde (à partir de  $\lambda$  donnée) pouvant être mis en évidence par le spectroscope,  $p$  est l'ordre d'observation et  $N$  est le nombre total de traits du réseau.

- Calculer  $R$  pour la radiation précédente et dans le second ordre ; en déduire  $\delta\lambda_{\min}$ .
- L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de distance focale  $f = 1 m$  ; quelle est, dans le second ordre et au minimum de déviation, la distance entre les images des raies de longueur d'onde  $\lambda = 0,5890\mu m$  et  $\lambda + \delta\lambda_{\min}$ , dans le plan focal de la lentille ?
- Ces deux raies sont-elles résolues spatialement si l'image est obtenue grâce à un capteur CCD (« Charge Coupled Device ») constitué de cellules élémentaires (« pixels ») de  $10\mu m$  de côté ?

Que peut-il se passer si la focale de la lentille est nettement plus courte ou si les cellules du capteur sont plus larges ?

## EXERCICE D' ORAL

- **CORRIGE** : «Pouvoir de résolution d'un réseau »

1) On applique LA « formule du réseau », à savoir :

$$\sin \theta - \sin i = p \frac{\lambda}{a} = pn\lambda \quad (1) ; \quad \text{or } |\sin \theta - \sin i|_{\max} = 2 \Rightarrow p_{\max} = E \left( \frac{2}{n\lambda} \right)$$

- L'application numérique donne : pour le ROUGE :  $p_{\max}^R = 2$  ; pour le VIOLET :  $p_{\max}^V = 4$

**Rq** : ces valeurs sont faibles, c'est une des limitations des réseaux **plans**, puisque le pouvoir de résolution est proportionnel à l'ordre  $p$ .

2) On différencie la relation (1), à  $i, n$  et  $p$  fixés, ce qui conduit à :

$$\cos \theta d\theta = pnd\lambda \Rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{pn}{\cos \theta}$$

- Considérons le minimum de déviation, dans un ordre donné et pour une longueur d'onde donnée ; cette fois, la différentiation de la relation (1) fournit :

$$\cos \theta \times d\theta = \cos i \times di \quad (2)$$

Par ailleurs, l'angle de déviation  $D$  est défini par :  $D = \theta - i \Rightarrow \frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1$

$\Rightarrow$  pour la déviation minimale, on a :  $\frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1 = 0 \Rightarrow d\theta = di \Rightarrow$  on reporte dans (2) :

$\cos \theta = \cos i \Rightarrow \theta = \pm i$ , pour  $i$  et  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  ; or  $\theta = i$  correspond à l'ordre 0, qui ne présente aucun intérêt en spectroscopie  $\Rightarrow$  on retient la solution  $\theta_{\min} = -i_{\min} \Rightarrow D_{\min} = -2i$ .

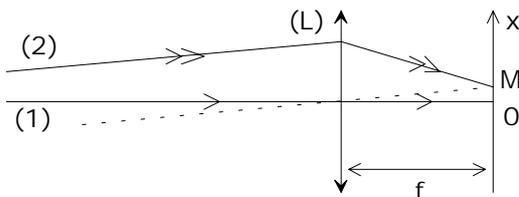
- En reportant cette dernière expression dans la relation (1), et se plaçant dans l'ordre 2, il vient :

$$2 \sin \theta_{\min} = 2n\lambda \Rightarrow \theta_{\min} = 0,7048 \text{ rad} = 40,38^\circ \Rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda} = 2,888 \text{ rad} / \mu\text{m}$$

3)a) Une simple application numérique fournit :

$$R = 2 \times N = 2 \times n \times 35 = 77000 \Rightarrow \delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{R} = 7,649 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 7,649 \text{ pm}$$

b) Raisonnons sur la figure ci-dessous :



Pour simplifier, on suppose que la lentille est perpendiculaire au rayon (1), correspondant à la raie de longueur d'onde  $\lambda$ .

- Quant à lui, le rayon (2), associé à la raie  $\lambda + \delta\lambda_{\min}$ , fait un angle  $\delta\theta_{\min}$  avec le rayon (1).

## EXERCICE D' ORAL

- En notant  $\delta x_{\min}$  la distance OM, on peut lire sur la figure :

$$\delta x_{\min} = f \times \tan(\delta\theta_{\min}) \approx f \times \delta\theta_{\min} = f \times \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right) \times \delta\lambda_{\min}$$

- L'application numérique permet d'obtenir :

$$\delta\theta_{\min} = 2,209 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

et

$$\delta x_{\min} = 22,09 \mu\text{m}$$

c) Les images des deux raies par la lentille sont séparées par une distance supérieure à la taille des pixels : elles se formeront donc sur **deux** cellules CCD **différentes** et donneront bien deux « informations » distinctes  $\Rightarrow$  les deux raies, déjà résolues angulairement, seront effectivement résolues spatialement.

**Rq** : si la distance focale de la lentille est plus faible (ou si la taille des pixels est plus grande), les deux rayons peuvent impressionner le même pixel et ne donner qu'une seule « image » : les raies, résolues angulairement, ne le sont plus spatialement.